

УРОК 8

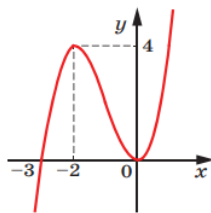
Тема уроку: Підсумковий урок за темою «Похідна та її застосування»

Підручник з математики для 10 класу § 3

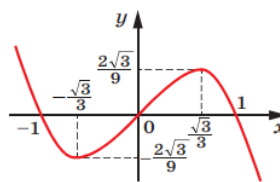
Сьогодні ви повинні повторити, систематизувати та узагальнити знання про похідну та її застосування, обов'язково вивчити теоретичний матеріал, використовувати означення, таблиці, схеми та властивості при розв'язуванні задач.

Перевірка домашнього завдання

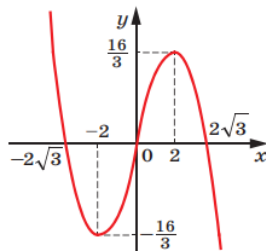
№25.2



1)



3)



2)

Треба знати

Таблиця похідних

$(C)' = 0$, константа	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(x)^1 = 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(e^x)' = e^x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Геометричний зміст похідної

Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 , дорівнює значенню похідної функції f у точці x_0 .

Механічний зміст похідної

Якщо $y = s(t)$ — закон руху матеріальної точки по координатній прямій, то її миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює значенню похідної функції $y = s(t)$ у точці t_0 .

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Правила обчислення похідних

Похідна суми	$(f + g)' = f' + g'$
Похідна добутку	$(fg)' = f'g + g'f$
Похідна частки	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Ознака сталості функції

Якщо для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку.

Ознака зростання функції

Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.

Ознака спадання функції

Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Окіл точки

Проміжок $(a; b)$, який містить точку x_0 , називають околом точки x_0 .

Точки екстремуму функції

Точку x_0 називають точкою максимуму функції f , якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f , якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.

Точки максимуму і мінімуму називають точками екстремуму функції.

Ознаки точок максимуму і мінімуму

Нехай функція f є диференційовною на проміжку $(a; b)$ і x_0 — деяка точка цього проміжку.

Якщо для всіх $x \in (a; x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, а для всіх $x \in [x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f .

Якщо для всіх $x \in (a; x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, а для всіх $x \in [x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f .

План дослідження властивостей функції

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність.
3. Знайти нулі функції.
4. Знайти проміжки зростання і спадання функції.
5. Знайти точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.
6. Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в околах окремих важливих точок тощо).

Виконай вправу <http://surl.li/crskb>

Розв'язування задач

Задача 1. Знайти похідну функції $f(x) = \frac{2}{x^3}$ у точці $x_0 = -1$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$, то $f(x) = 2x^{-3}$.

Тоді $f'(x) = (2x^{-3})' = 2(x^{-3})' = 2 \cdot (-3)x^{-3-1} = -6x^{-4} = \frac{6}{x^4}$.

Маємо: $f'(-1) = -\frac{6}{(-1)^4} = -6$. Відповідь. $f'(-1) = -6$.

Задача 2. Для функції $f(x) = 3\cos x - 5\operatorname{ctg} x$ знайти $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. $f'(x) = 3(\cos x)' - 5(\operatorname{ctg} x)' = -3\sin x + \frac{5}{\sin^2 x}$.

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\sin \frac{\pi}{2} + \frac{5}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = -3 \cdot 1 + \frac{5}{1^2} = -3 + 5 = 2$.

Відповідь. 2.

Задача 3. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, де $f(x) = \cos x + x$.

Розв'язання. 1) $f'(x) = (\cos x + x)' = (\cos x)' + x' = -\sin x + 1$.

2) Маємо рівняння: $-\sin x + 1 = 0$;

$$\sin x = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = -4$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0) = f(-4) = -\frac{1}{4}$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$;

$f'(x_0) = f'(-4) = -\frac{1}{16}$. Підставимо отримані значення в рівняння

дотичної: $y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{16}(x + 4)$. Спростивши вираз у цьому рівнян-

ні, матимемо: $y = -\frac{1}{16}x - \frac{1}{2}$. Відповідь. $y = -\frac{1}{16}x - \frac{1}{2}$.

Задача 5. Знайти тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{x}$, яка проведена в точці $A(4; 2)$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Тоді $\operatorname{tg} \varphi = f'(4) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{4} = 0,25$. Відповідь. 0,25.

Задача 6. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2$ (x вимірюється в метрах, t – у секундах). Знайти швидкість точки в момент часу $t = 5$ с.

Розв'язання. Оскільки $v(t) = x'(t)$, то $v(t) = x'(t) = (t^2)' = 2t$. Тоді $v(5) = 2 \cdot 5 = 10$ (м/с).

Відповідь. 10 м/с.

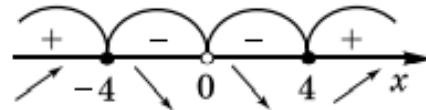
Задача 7. Знайти проміжки монотонності функції $f(x) = x + \frac{16}{x}$.

Розв'язання. 1) $D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$2) f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2} = \frac{(x-4)(x+4)}{x^2}.$$

3) $f'(x) = 0$, тобто $\frac{(x-4)(x+4)}{x^2} = 0$, тоді $x_1 = 4$, $x_2 = -4$ – критичні точки.

4) Позначимо ці точки на області визначення функції та з'ясуємо знак похідної (зробіть це самостійно) на кожному з проміжків (мал. 21.6).



Мал. 21.6

5) Функція зростає на проміжках $(-\infty; -4]$ і $[4; +\infty)$, спадає на проміжках $[-4; 0)$ і $(0; 4]$.

Відповідь. $(-\infty; -4]$ і $[4; +\infty)$ – проміжки зростання, $[-4; 0)$ і $(0; 4]$ – проміжки спадання.

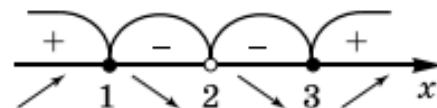
Задача 8. Знайти екстремуми функції $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

Розв'язання. 1) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

$$2) y' = \frac{2x(x-2) - 1(x^2 - 3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

3) $y' = 0$, тобто $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ – критичні точки.

4) Позначимо критичні точки на області визначення функції та з'ясуємо знак похідної на кожному з отриманих проміжків (мал. 22.9).



Мал. 22.9

5) Отже, $x_{\max} = 1$; $x_{\min} = 3$ – точки екстремуму.

$$\text{Тоді } y_{\max} = y(1) = \frac{1^2 - 3}{1 - 2} = 2; y_{\min} = y(3) = \frac{3^2 - 3}{3 - 2} = 3.$$

Відповідь: $y_{\max} = y(1) = 2$; $y_{\min} = y(3) = 3$.

[Готуємось до ЗНО](#)

Контрольне тестування <http://surl.li/crsok>